二、点差法与定比点差法

类型一：点差法

1．已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，试确定$m$的取值范围，使得对于直线$y=4x+m$，椭圆$C$上有不同的两点关于该直线对称．

2．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

（1）求椭圆的方程.

（2）设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A，B，已知点 A 的坐标为 $(-a,0)$，点 $Q(0,y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上，且 $\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{QB}=4$，求 y_0 的值.

类型二：定比点差法

1．已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上下两个焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_1$与$y$轴垂直的直线交椭圆$C$于$M$，$N$两点，$\Delta MNF_2$的面积为$\sqrt{3}$，椭圆$C$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）已知O为坐标原点，直线$l:y=kx+m$与y轴交于点P，与椭圆C交于A，B两个不同的点，若存在实数λ，使得$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$，求$m$的取值范围．

2．设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A，B 时，在线段 AB 上取点 Q，满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$，证明：点 Q 总在某定直线上.

3．已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2}{3}$，半焦距为$c(c>0)$，且$a-c=1$．经过椭圆的左焦点$F$，斜率为$k_1(k_1\neq 0)$的直线与椭圆交于$A$，$B$两点，$O$为坐标原点．

（Ⅰ）求椭圆Γ的标准方程；

（Ⅱ）当$k_1=1$时，求$S_{\Delta AOB}$的值；

（Ⅲ）设$R(1,0)$，延长AR，BR分别与椭圆交于C，D两点，直线CD的斜率为k_2，求证：$\frac{k_1}{k_2}$为定值．

4．设椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$．

（1）当l与x轴垂直时，求直线AM的方程；

（2）设O为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

5．已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$．斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A，B．

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

（Ⅲ）设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D．若 C，D 和点 $Q(-\frac{7}{4},\frac{1}{4})$ 共线，求 k．

巩固练习

1．椭圆 $\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{9}=1$ 上不同三点 $A(x_1,y_1),B(4,\frac{9}{5}),C(x_2,y_2)$ 与焦点 $F(4,0)$ 的距离成等差数列．

（1）求证 $x_1+x_2=8$；

（2）若线段 AC 的垂直平分线与 x 轴的交点为 T，求直线 BT 的斜率．

2．若抛物线 $y=x^2$ 上存在两点关于直线 $l:y=m(x-3)$ 对称，则实数 m 的取值范围是____．

3．已知 F_1，F_2 分别为椭圆的 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左，右焦点，点 A，B 在椭圆上，若 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则点 A 的坐标可以是(　　)

A．$(1,\frac{\sqrt{6}}{3})$　　B．$(-\sqrt{3}，0)$　　C．$(0,-1)$　　D．$(\sqrt{2}，\frac{\sqrt{3}}{3})$

4．过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点 A 作斜率为 -1 的直线，该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为 B、C．若 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，则双曲线的离心率是(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

5．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$(1,0)$，且右焦点到上顶点的距离为$\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$P(2,2)$的动直线交椭圆C于A，B两点，

(i)若$|PA||PB|=\dfrac{20}{3}$，求直线AB的斜率；

(ii)点Q在线段AB上，且满足$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{2}{|PQ|}$，求点$Q$的轨迹方程．

6．已知抛物线$C:y^2=3x$的焦点为F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线l与C的交点为A，B，与x轴的交点为P．

（1）若$|AF|+|BF|=4$，求l的方程；

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求$|AB|$．

7．已知抛物线$C:y^2=3x$的焦点为F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线l与抛物线C的交点为A， B，与x轴的交点为P．

（1）若$AF+BF=4$，求直线l的方程；

（2）若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求线段$AB$的长．